

Визуализация течений вязкой несжимаемой жидкости, соответствующих точным решениям уравнений Навье-Стокса

В. А. Галкин^{1,А,В}, А.О. Дубовик^{2,А,В}, Д.А. Моргун^{3,А}

^А Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН

^В Сургутский государственный университет

¹ ORCID: 0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

² ORCID: 0000-0002-4158-9646, alldubovik@gmail.com

³ ORCID: 0000-0003-0692-1583, morgun_da@office.niisi.tech

Аннотация

В работе визуализируются течения, соответствующие ранее опубликованным авторами точным решениям системы уравнений гидродинамики, состоящей из векторного уравнения Навье-Стокса и закона сохранения массы для несжимаемой жидкости. В данной работе используются библиотека MathGL для языка C/C++ и ParaView для научной визуализации результатов численно-аналитических расчетов. Без использования подобных средств было бы невозможно увидеть, что течение жидкости раслаивается на инвариантные подобласти, а траектории движения частиц жидкости наматываются на торообразные поверхности.

Большая часть научных трудов по исследованию уравнений гидродинамики освещает результаты расчетов и не касается вопросов существования точных аналитических решений. При этом, эти расчёты выполняются при специально подобранном наборе подгоночных параметров, уникальных для используемого оборудования и применяемого вычислительного комплекса программ. Становятся актуальными вопросы о доверии к результатам таких расчетов, их верификации точными решениями и создании банка тестовых примеров прикладных задач с целью удостоверения применимости результатов расчетов на практике.

Ключевые слова: гидродинамика, визуализация течения жидкости, слоистое течение, точные решения.

1. Введение

Динамика вязкой несжимаемой жидкости в области D , $t > 0$ определяется векторным полем скорости \mathbf{u} и полем давления p [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Здесь t – время, ρ_0 – плотность жидкости, μ – кинематическая вязкость, $\rho_0, \mu = \text{const.}$ Поле давления p можно найти из (1), (2) с точностью до аддитивного слагаемого, являющегося произвольной функцией времени.

В качестве граничных условий в параграфах 2 и 3 рассматриваются условия прилипания

$$\mathbf{u}|_{\partial D} = 0. \quad (3)$$

В параграфах 4 и 5 справедливо другое граничное условие – непротекания

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\partial D} = 0, \quad (4)$$

где вектор \mathbf{n} – нормаль к границе области течения ∂D . Граничные условия в касательном пространстве к многообразию ∂D задаются сужением точных решений.

В данной работе описываются различные классы точных решений уравнений гидродинамики, удовлетворяющих (1) – (3) или (1), (2), (4), опубликованные ранее в работах авторов [2–6]. Визуализация этих классов решений позволяет, абстрагируясь от имеющихся ошибок методов вычислительной гидродинамики, проанализировать структуру сильно запутанных вихревых течений. При подготовке этой публикации использовались библиотека MathGL (<https://mathgl.sourceforge.net>) и ParaView (<https://www.paraview.org>).

Для нефтегазовой отрасли актуальна задача математического моделирования течения жидкости в пористой структуре. Решение этой задачи открывает путь к созданию отечественной технологии «цифровое месторождение» [7], нацеленной на повышение рентабельности процесса добычи углеводородов за счет управления динамикой углеводородсодержащих флюидов в пористой среде, в том числе за счет тепловых эффектов [8–11] и деформации пластов [12].

Численное решение подобного класса задач предполагает применение суперкомпьютеров и специального разработанного программного обеспечения. При этом, расчёты выполняются при специально подобранном наборе подгоночных параметров [4], уникальных для используемого оборудования и применяемого вычислительного комплекса программ. В связи с этим, актуальным является создание банка тестовых примеров точно решаемых нестационарных задач гидродинамики в условиях сложной геометрии, применение которых позволит верифицировать результаты расчетов и оценить их точность. В работах [13–21] представлены результаты численного моделирования трехмерных течений жидкости и оценки их точности вычислений, а в работах [22–26] – некоторые классы точных решений.

Областью течения жидкости является пористая среда $D \equiv \mathbb{R}^n \setminus \partial D$, где ∂D – дискретный набор точек, являющихся узлами некоторой сетки, при этом, выполняется условие прилипания (3). Сетка состоит из ячеек – квадратов (параграф 2) или кубов (параграф 3), линейный размер которых равен 2π . Пространственно-временной заменой можно получить сетку, ячейки которой имеют произвольный линейный размер. Далее полагается $\rho_0 = 1$.

2. Точные решения в плоской периодической структуре

Рассмотрим точное решение [2, 3] задачи (1) – (3) в плоской области D

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= e^{-\mu\lambda t} \left\{ \sin(\sqrt{\lambda} x_2); \sin(\sqrt{\lambda} x_1) \right\}, \\ p &= e^{-2\mu\lambda t} \cos(\sqrt{\lambda} x_1) \cos(\sqrt{\lambda} x_2) \end{aligned} \quad (5)$$

где (x_1, x_2) обозначают декартовы координаты. Решение (5) имеет место для начального условия

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \left\{ \sin(\sqrt{\lambda} x_2); \sin(\sqrt{\lambda} x_1) \right\}, \quad \lambda > 0,$$

Граничное условие прилипания (3) выполняется в точках $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \times \mathbb{Z}_2$. Рис. 1 при $\lambda = 4$

иллюстрирует структуру течения (5). Ври этом, вся область представляет собой объединение квадратов со сторонами $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, полностью заполняющие область течения D .

Внутри этих квадратов жидкость движется по замкнутым траекториям, с центрами в граничных точках. Эти замкнутые траектории диффеоморфны двумерным торами, т. е. окружностям. Центры квадратов расположены в узлах сетки ∂D . Вдоль их границ жидкость скользит по касательной. Этот же эффект рассматривался в [27] для аналитиче-

ского решения уравнений магнитной гидродинамики, при этом, жидкость скользила вдоль границы параллелепипеда.

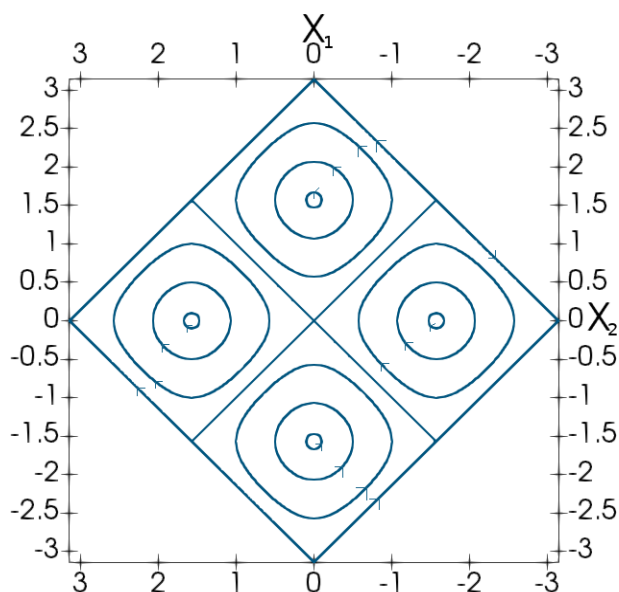


Рис. 1. Структура течения, соответствующая решению (5) при $\lambda = 4$

3. Точные решения в пространственной периодической структуре

Рассмотрим точное решение [2–4] задачи (1) – (3) в пространственной области D

$$\mathbf{u} = e^{-\mu t} \left\{ \sin x_2 - \cos x_3; \sin x_3 - \cos x_1; \sin x_1 - \cos x_2 \right\}, \quad p = -\frac{\mathbf{u}^2}{2},$$

справедливое для начального условия

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \left\{ \sin x_2 - \cos x_3; \sin x_3 - \cos x_1; \sin x_1 - \cos x_2 \right\}$$

и граничного условия (3).

В этом случае границей области течения ∂D являются точки $2\pi \times \mathbb{Z}_3 + \alpha_i$ и $2\pi \times \mathbb{Z}_3 + \pi(1, 1, 1) + \alpha_i$, где α_i один из векторов множества $0.25\pi \times \{(1, 1, 1), (1, -1, 3), (3, 1, -1), (-1, 3, 1)\}$.

Отметим тот факт, что время t влияет только на длину вектора \mathbf{u} , но не на его направление. При μ отличном от нуля течение затухает со временем. Случай $\mu = 0$ рассмотрен нами ранее в работе [28]. При $\mu = 0$ для скоростей \mathbf{u} выполняется уравнение неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ для несжимаемой жидкости, и поле \mathbf{u} удовлетворяет стационарному уравнению Эйлера

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \Phi,$$

$$\text{где } \Phi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3}{2} + (\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \sin x_3 \cos x_1).$$

В работе [28] мы представили следующий метод, удобный для визуального анализа подобных задач. Пусть с течением времени траектория погружается в расчётную область вдоль некоторой координаты (x_1 , x_2 или x_3). Выберем соответствующую координатную ось и в ортогональной к ней плоскости будем строить линии уровня потенциала Φ для текущего значения «координаты погружения». На графике линий уровня обозначим текущую расчётную точку квадратиком, а ряд предыдущих точек траектории обозначим кружочками. Возьмём такие графики для текущей расчётной точки и нескольких предыдущих и сформируем из них анимацию, по которой можно визуальное отследить динамику траектории на фоне потенциала, см. рис. 2.

Траектория частицы на такой анимации демонстрирует некую плавно вращающуюся фигуру, которая погружается в расчётную область вслед за текущей точкой траекто-

рии. В зависимости от начальной точки траектории меняется и образуемая траекторией фигура; в одних случаях фигура напоминает остроугольный треугольник, в других – округлый лепесток, в третьих – принимает промежуточные формы.

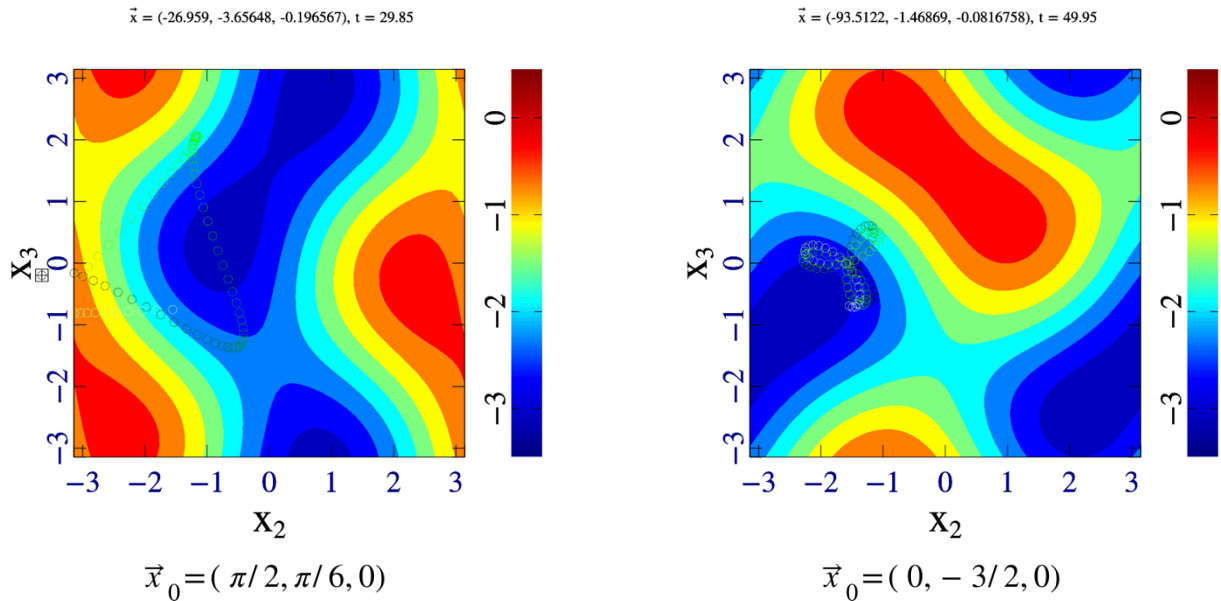


Рис. 2. Траектория частицы на фоне линий уровня потенциала Φ , построенных в плоскости, ортогональной Ox_1 при текущем значении x_1 для двух траекторий с разными \vec{x}_0

4. Точные решения в шаре и сферических слоях

Обозначим за ρ_k неотрицательные корни уравнения

$$\operatorname{tg} R = R, \quad R \geq 0,$$

упорядоченные по возрастанию номеров $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_k < \dots$$

При этом имеет место асимптотическая при $k \rightarrow \infty$ оценка

$$\rho_k \sim \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Рассматривается трехмерная область $D \subset \mathbb{R}_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$. Обозначим B_{ρ_k} – шар радиуса ρ_k , т. е.

$$B_{\rho_k} = \left\{ x \in \mathbb{R}_3 : \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \rho_k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а B_{ρ_k, ρ_l} – сферический слой с радиусами ρ_k и ρ_l , т. е.

$$B_{\rho_k, \rho_l} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}_3 : \rho_k < \|x\| < \rho_l \right\}.$$

Границу шара B_{ρ_k} обозначим $S_{\rho_k} \stackrel{\text{def}}{=} \partial B_{\rho_k}$, т. е. S_{ρ_k} – граница радиуса ρ_k . Для каждого

вектора $x \in \mathbb{R}_3$ обозначим символом $r = \|x\|$ его евклидову норму.

Положим

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} r^{-1} \sin(r), & r > 0, \\ 1, & r = 0. \end{cases}$$

Пусть $x \in \mathbb{R}_3 \setminus \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_3$. Рассмотрим векторное поле

$$U_{\alpha}(x) = \left\{ \frac{\bar{u}'(r)}{r} \begin{bmatrix} x_2 & -2 & -x_3 \\ -x_1 & x_3 & -2 \\ -2 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \left(\bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r} \right) \begin{bmatrix} x_1 x_3 & -(x_2^2 + x_3^2) & x_1 x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_2 & -(x_1^2 + x_3^2) \\ -(x_1^2 + x_2^2) & x_1 x_3 & x_2 x_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Показано в [5], что $U_{\alpha}(x)$ можно продолжить на всё пространство \mathbb{R}_3 в классе бесконечно дифференцируемых функций C^{∞} и доказана теорема:

Теорема. Пусть векторное поле

$$u_{\alpha}(x, t) = U_{\alpha}(x) \exp(-\mu t), \quad x \in \mathbb{R}_3, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

и скалярная функция

$$p(x, t) = -\frac{\rho_0}{2} (u_{\alpha}(x, t), u_{\alpha}(x, t)) + \beta(t), \quad (7)$$

где $\beta(t)$ — произвольная функция, зависящая от времени t . Тогда пара $\{u_{\alpha}, p\}$ является решением системы уравнений Навье—Стокса (1), (2) в области $D = \{x \in \mathbb{R}_3\}$. Более того, на границе S_{ρ_k} каждого шара B_{ρ_k} , $k=1, 2, \dots$ выполняются условия скольжения (4), т.е. формулы (6), (7) дают решение задачи (1), (2), (4) в каждом пространственном шаре $D = B_{\rho_k}$ и сферическом слое $D = B_{\rho_k, \rho_l}$, $1 \leq k < l \leq +\infty$. (Равенство $l = +\infty$ по определению означает, что $D = \mathbb{R}_3 \setminus (B_{\rho_k} \cup S_{\rho_k})$). Векторное поле скоростей (6), рассматриваемое в области $D = \{x \in \mathbb{R}_3\}$ и сферических слоях $D = \mathbb{R}_3 \setminus (B_{\rho_k} \cup S_{\rho_k})$, стремится к нулю при $\|x\| \rightarrow \infty$.

Ограничимся случаем $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0, 0)$, тогда выражение для $U_{\alpha}(x)$ упростится и примет вид

$$V = \begin{pmatrix} \bar{u}'(r) \frac{x_2}{r} + \bar{u}'' \frac{x_1 x_3}{r^2} - \bar{u}'(r) \frac{x_1 x_3}{r^3} \\ -\bar{u}'(r) \frac{x_1}{r} + \bar{u}'' \frac{x_2 x_3}{r^2} - \bar{u}'(r) \frac{x_2 x_3}{r^3} \\ -\bar{u}'(r) \frac{2}{r} + \bar{u}' \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^3} - \bar{u}''(r) \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} \end{pmatrix}$$

Таблица 1 Корни уравнения $\text{tg}(r) = r$ — границы непротекания

ρ_0	0.0000000000000000
ρ_1	4.49340945790906
ρ_2	7.72525183693771
ρ_3	10.9041216594289
ρ_4	4.49340945790906

В соответствии с теоремой, выполняются условия непротекания

$$(V(x, t), n(x)) \big|_{x \in \partial D} = 0$$

на границах сфер с радиусами $r = \rho_k$, где ρ_k — неотрицательные корни уравнения $\text{tg}(r) = r$, упорядоченные по возрастанию номеров. Несколько значений ρ_k приведены в таблице 1.

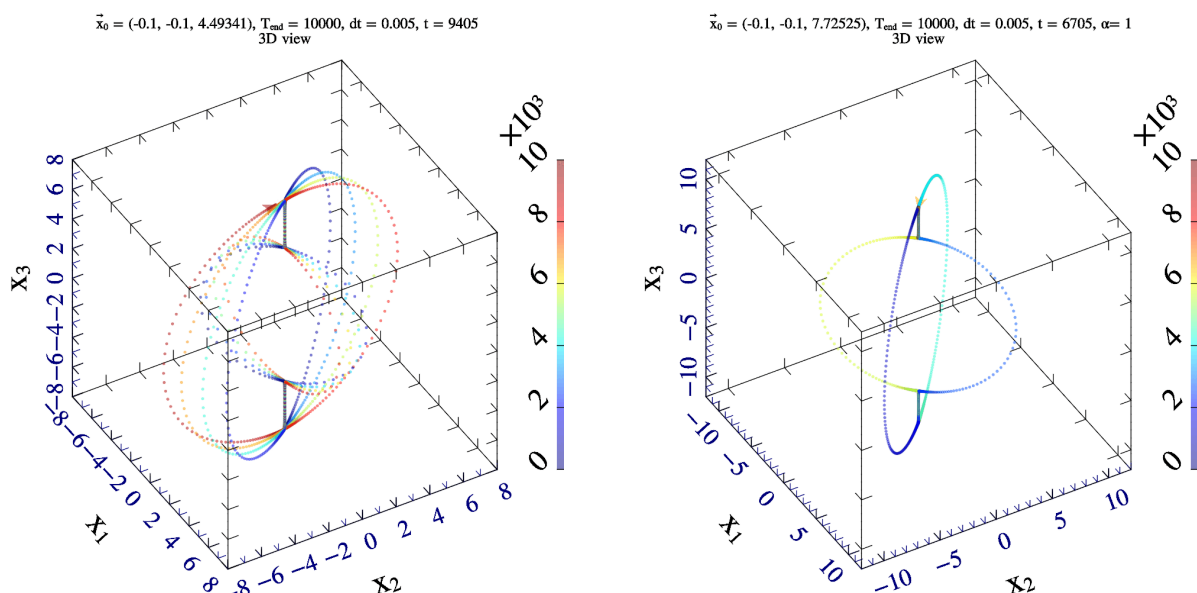


Рис. 3. Визуализация траектории. Слева: начальная точка $\vec{x}_0 = (-0.1, -0.1, 4.49341)$ задана внутри первого шарового слоя $\rho_1 < r < \rho_2$, вблизи сферы $r = \rho_1$. Справа: начальная точка $\vec{x}_0 = (-0.1, -0.1, 7.72525)$ задана внутри второго шарового слоя $\rho_2 < r < \rho_3$, вблизи сферы $r = \rho_2$.

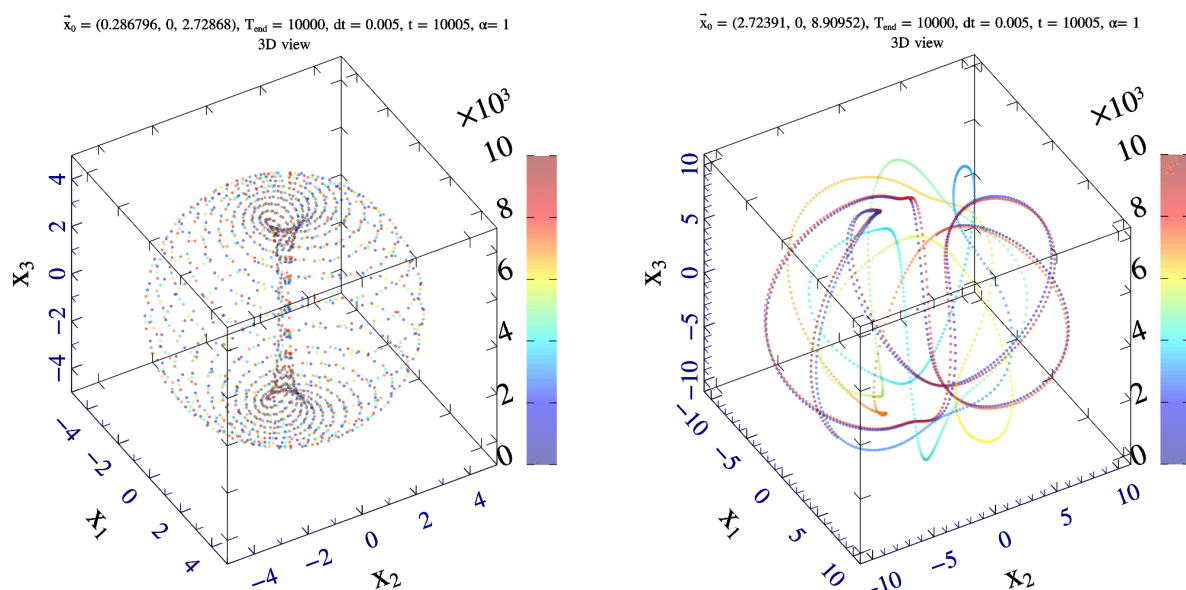


Рис. 4. Визуализация зависимости траекторий от начальной точки $\vec{x}_0 = (r, \varphi, \theta)$. Точка меняется от значения $\theta = 1^\circ$ (положение вблизи вертикальной оси) до значения $\theta = 90^\circ$ (положение вблизи экватора). Слева – анимация для внутреннего шара $r < \rho_1$; справа – анимация для второго шарового слоя $\rho_2 < r < \rho_3$.

Визуализация результатов численного моделирования демонстрирует «расслоение» по шаровым слоям. На рисунке 3 представлены анимации траектории для первого и второго шаровых слоёв. Видно, что траектория точки, которая определяется векторным полем (4) и численно моделируется путём решения задачи Коши для соответствующего уравнения движения, действительно остаётся в пределах выбранного шарового слоя. Отметим, что движение вдоль вертикальной оси в соседних шаровых слоях происходит в противоположных направлениях.

По анимации, представленным на рисунке 4, можно составить представление о всех возможных вариантах траекторий, которые могут реализоваться во внутреннем шаре (рис. 4, слева) или в шаровых слоях (рис. 4, справа).

5. Точные решения в цилиндре и цилиндрических слоях

Пусть D – трехмерная область течения, $D \subset \mathbb{R}^3 = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \}$. Рассмотрим систему уравнений (1), (2), (4) в цилиндре Π_k и коаксиальном цилиндре Π_{k_1, k_2}

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < r(\mathbf{x}) < \rho_k, 0 < x_3 < 2\pi\sqrt{2} \}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \Pi_{k_1, k_2} &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \rho_{k_1} < r(\mathbf{x}) < \rho_{k_2}, 0 < x_3 < 2\pi\sqrt{2} \}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \quad k_1 \neq k_2, \end{aligned}$$

где $r(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а $\rho_k > 0$, – упорядоченные по возрастанию корни уравнения

$$J'_0\left(\frac{\rho_k}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $J_0(r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, определенное в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{r=0\}$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{J'_0\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{r\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_2 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \\ -x_1 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} J_0\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Показано в [6], что функция $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ имеет продолжение на всё пространство \mathbb{R}^3 в классе бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и справедлива теорема:

Теорема. Пусть векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и скалярное поле $p(\mathbf{x}, t)$ имеют вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) e^{-\mu t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0,$$

$$p(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho_0}{2} \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ – произвольная функция времени t . Тогда пара $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)\}$ является решением системы уравнений Навье–Стокса (1), (2) в области $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$. На границе области каждого цилиндра $\Pi_k = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < r(\mathbf{x}) < \rho_k, 0 < x_3 < 2\pi\sqrt{2} \}$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется условие скольжения (4), т.е. выражения (9), (10) дают решения задачи (1), (2), (4) в каждом цилиндре $D = \Pi_k$ и цилиндрическом слое $D = \Pi_{k,l}$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$. Векторное поле (8), рассматриваемое в $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ и цилиндрических слоях $D = \mathbb{R}^3 \setminus \left(\bigcup_k \Pi_k\right)$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Течение жидкости, соответствующее решению (9), (10) также разбивается на инвариантные подобласти. Это верхняя и нижняя половины цилиндра. На рис. 5–7 проиллюстрирована эволюция течения одной точки жидкости, рассматриваемая в верхней половине цилиндра, под действием векторного поля (8). Получаемые траектории, описываемые с течением времени, диффеоморфны торами. Для точки, взятой из нижней половины цилиндра, структура течения аналогична. Необходимо лишь учесть симметрию относительно плоскости $x_3 = \pi\sqrt{2}$. На рис. 5 отображена траектория движения точки $(\rho_1 - \varepsilon, \rho_1 - \varepsilon, 2\pi\sqrt{2} - \varepsilon)$, взятой вблизи поверхности цилиндра при $\varepsilon = 10^{-4}$, с течением времени, на рис. 6 проиллюстрирована конфигурация ее пути а более поздний момент времени.

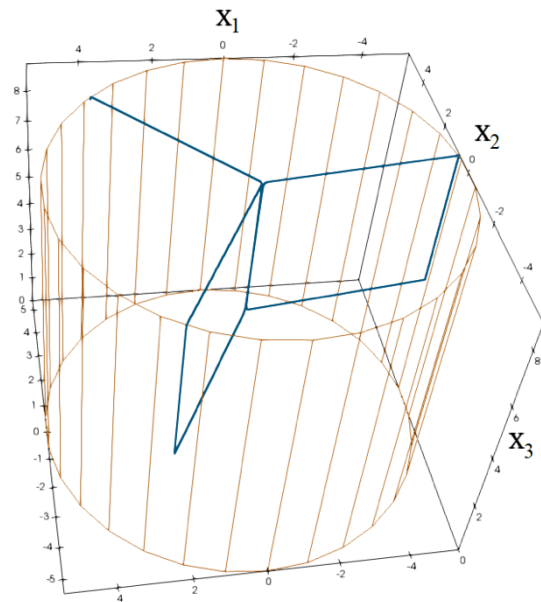


Рис. 5. Эволюция течения точки жидкости $(\rho_1 - \varepsilon, \rho_1 - \varepsilon, 2\pi\sqrt{2} - \varepsilon)$, соответствующая (8)

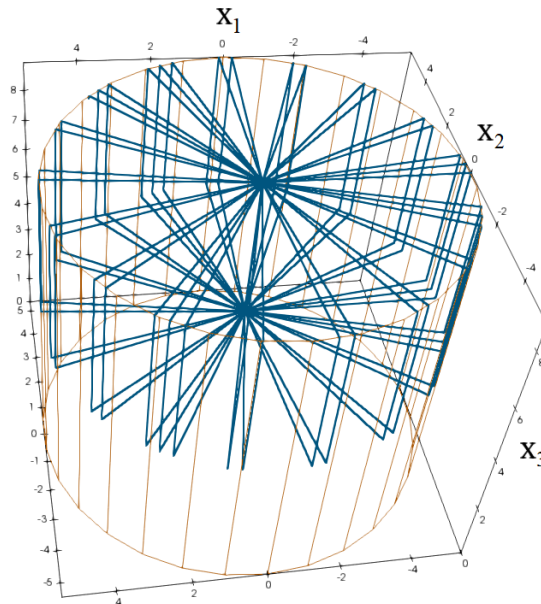


Рис. 6. Эволюция течения точки жидкости $(\rho_1 - \varepsilon, \rho_1 - \varepsilon, 2\pi\sqrt{2} - 0.1)$, соответствующая (8), через некоторое время

На рис. 7 отображена траектория движения точки $(\rho_1 - \varepsilon, \rho_1 - \varepsilon, 2\pi\sqrt{2} - \varepsilon)$, взятой внутри верхней половины цилиндра, с течением времени.

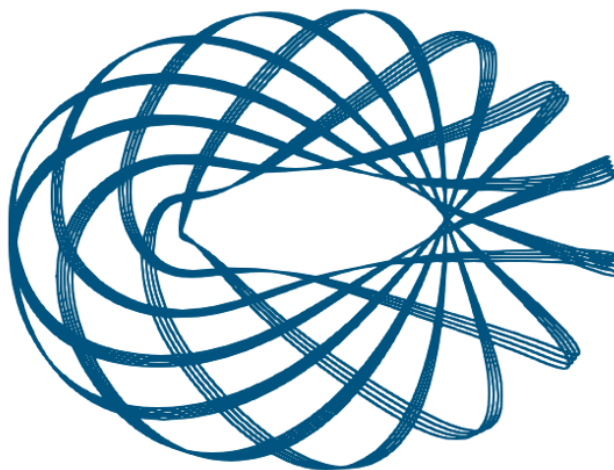


Рис. 7. Эволюция течения точки жидкости $(\rho_1 - \varepsilon, \rho_1 - \varepsilon, 2\pi\sqrt{2} - 0.1)$, соответствующая (8), через некоторое время

6. Заключение

Статья посвящена вопросам визуализации численно-аналитических расчетов решений уравнений гидродинамики, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости. Использование таких средств научной визуализации, как библиотека MathGL (<https://mathgl.sourceforge.net>) и ParaView (<https://www.paraview.org>), позволяет более детально рассмотреть структуру сложных трехмерных течений и проанализировать результаты их моделирования.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления».

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебн. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. 736 С.
2. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О. Точные решения системы Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // Докл. Академии Наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 13–16.
3. Galkin V.A., Dubovik A.O. Visualization of flows of a viscous conductive liquid with the presence of impurities in the flow field corresponding to exact solutions of the MHD equations // Scientific Visualization. 2021. V. I. 1. p. 104–123.
4. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Математические и вычислительные проблемы, связанные с образованием структур в сложных системах // Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14. № 4. с. 805–815.
5. Галкин В.А. Об одном классе точных решений системы Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в шаре и сферических слоях // ЖВМиМФ. 2023. Т. 63. № 6. с. 1000–1005.
6. Галкин В.А., Дубовик А.О. Об одном классе точных решений системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости // Жур. Матем. модел. 2023. Т. 35. № 8. с. 3–13.
7. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // ДАН. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151.

8. Галич Н.Е. Тепловая неустойчивость и пробой движущихся вязких жидкостей в электрическом поле и при поглощении света // Журнал технической физики, 1989, т. 59, вып. 7, с 10–17.
9. Алтоиз Б.А., Савин Н.В., Шатагина Е.А. Влияние тепловыделения в микропрослойке жидкости при измерении ее вязкости // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 5. С. 21–27.
10. Куштанова Г.Г. Физика геосферы. Казань. Из-во КазГУ. 2004. 44 С.
11. Семенов Н.Н. Цепные реакции. М.: Гомхимтехиздат. 1934.
12. Шестаков В.М. Гидрогеодинамика. М.: Из-во МГУ. 1995. 368 С.
13. Ахмед Х.Ф., Малик Ф.К., Хан М.М. Метод пассивного управления потоком спутной струей, его гидродинамическая и теплофизическая эффективность при обтекании цилиндра, размещенного в канале с волнистыми стенками // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29. № 3. С. 371–388.
14. Дельнов В.Н. Применение схем течения и учет гидродинамических эффектов при совершенствовании раздающих коллекторных систем теплообменников и реакторов ЯЭУ // Вопросы атомной науки и техники. серия: ядерно-реакторные константы. 2021. № 2. С 200–217.
15. Ренев М.Е., Сафронова Ю.Ф., Стишков Ю.К. Управление обтеканием круглого цилиндра с помощью коронного разряда // Журнал технической физики. 2019. Т. 89. № 9. С. 1352–1359.
16. Хорошев А.С., Шахов В. Г. Интенсивность конвекции жидкостей с разным числом Прандтля в вертикальном цилиндре большого удлинения // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2018. Т 21. № 1. С 70–79.
17. Antuono M., Sun P. N., Marrone S., Colagrossi A. The δ -ALE-SPH model: an arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the δ -SPH model with Particle Shifting Technique. *Computer & Fluids*. 2020;104806. DOI: 10.1016/j.compfluid.2020.104806.
18. Mohammed A. and others. CFD and statistical approach to optimize the average air velocity and air volume fraction in an inert-particles spouted-bed reactor (IPsBR) system. *Helvion*. 2021;7(3):E06369. DOI: 10.1016/j.helivon.2021.e06369.
19. Ren X., Xu K., Shyy W. A multi-dimensional high-order DG-ALE method based on gas-kinetic theory with application to oscillating bodies. *Journal of Computational Physics*. 2016;316:700–720. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.04.028.
20. Elgeti S., Sauerland H. Deforming fluid domains within the finite element method: five mesh based tracking methods in comparison. *Archives of Computational methods in Engineering*. 2016;23:323–361. DOI: 10.1007/s11831-015-9143-2.
21. Бурого Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л. Применение наложенных сеток к расчету течений в областях переменной геометрии. *Сб. трудов XX юбилейной межд. конф. по выч. механике и совр. прикладным системам*. 2017:395–397. DOI:10.13140/RG.2.2.27386.39369.
22. Князев Д.В., Колпаков И.Ю. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом. *Нелинейная динамика*. 2015;11(1):89–97.
23. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // Czechoslovak Journal of Physics. 1994. Vol. 44, № 2. Pp. 97–106.
24. Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96. <https://doi.org/10.26456/vtpmk557>
25. V. Arnol'd. "Sur la topologie des ecoulements stationnaires des fluides parfaits". C. R. Acad. Sci. Paris, 261:17–20, 1965.
26. О. И. Богоявленский. О задаче Кельвина 1880 года и точных решениях уравнений Навье—Стокса // Общеинститутский семинар «Математика и ее приложения» Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук 21 мая 2015 г. Москва, конференц-зал МИАН (ул. Губкина, 8). Электронный ресурс: www.mathnet.ru

27. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Гореликов А. В. Алгоритм типа предиктор–корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // ДАН. 2015. Т. 464. № 5. с. 525–528.

28. Галкин В. А., Моргун Д. А. Моделирование и визуализация траекторий частиц, движущихся под действием несимметричного потенциала // Успехи кибернетики. 2022;3(3):8–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-3-1.

Visualization of Flow of a Viscous Incompressible Fluid Corresponding to Exact Solutions of the Navier-Stokes Equations

V. A. Galkin^{1,A,B}, A.O. Dubovik^{2,A,B}, D.A. Morgun^{3,A}

^A Surgut Branch of SRISA

^B Surgut State University

¹ ORCID: 0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

² ORCID: 0000-0002-4158-9646, alldubovik@gmail.com

³ ORCID: 0000-0003-0692-1583, morgun_da@office.niisi.tech

Abstract

The work visualizes flows corresponding to the exact solutions of the system of hydrodynamic equations previously published by the authors, consisting of the vector Navier-Stokes equation and the law of conservation of mass for an incompressible fluid. This work uses the MathGL library for the C/C++ language and ParaView for scientific visualization of the results of numerical and analytical calculations. Without the use of such means, it would be impossible to see that the fluid flow is stratified into invariant subregions, and the trajectories of motion of fluid particles are wound on torus-shaped surfaces.

Most of the scientific works on the study of hydrodynamic equations cover the results of calculations and do not address the questions of the existence of exact analytical solutions. At the same time, these calculations are performed with a specially selected set of fitting parameters unique to the equipment used and the computer software used. Questions about trust in the results of such calculations, their verification with exact solutions and the creation of a bank of test examples of applied problems in order to certify the applicability of the calculation results in practice become relevant.

Keywords: hydrodynamics, visualization of fluid flow, layered flow, exact solutions.

References

1. Landau L.D. Lifshits E. M. Teoreticheskaya fizika: Uchebn. posob.: Dlya vuzov. V 10 t. T. VI. Hydrodynamika [Theoretical physics: Textbook. manual: For universities. In 10 volumes, V. VI. Continuous media electrodynamics.] –Moscow: FIZMATLIT. 2001. 736 p. [in Russian]
2. Betelin V.B., Galkin V.A., Dubovik A.O. Exact Solutions of Incompressible Navier–Stokes Equations in the Case of Oil and Gas Industrial Problems // Doklady Mathematics. 2020. V. 102. No 3. p. 456–459.
3. Galkin V.A., Dubovik A.O. Visualization of flows of a viscous conductive liquid with the presence of impurities in the flow field corresponding to exact solutions of the MHD equations // Scientific Visualization. 2021. V. 13. No. 1. p. 104–123.
4. Betelin V.B., Galkin V.A. Mathematical and computational problems associated with the formation of structures in complex systems // Computer Research and Modeling. 2022, V. 14, No. 4. p. 805–815. [in Russian]
5. Galkin V.A. On a Class of Exact Solutions to the Incompressible Navier–Stokes System in a Ball and a Spherical Layer // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. V. 63. I. 6. p. 1064–1069.
6. Galkin V.A., Dubovik A.O. On one class of exact solutions of the system of Navier-Stokes equations for an incompressible fluid // Zhur. Math. model. 2023. V. 35. No. 8. p. 3–13. [in Russian]

7. Betelin V.B., Galkin V.A. Control of Incompressible Fluid Parameters in the case of Time_Varying Flow Geometry // *Doklady Mathematics*. 2015. V. 92. No. 1. p. 511–513.
8. Galich N.E. Teplovaya neustoychivost' i proboy dvizhushchikhsya vyazkikh zhidkostey v elektricheskoy pole i pri pogloshchenii sveta [Thermal instability and breakdown of moving viscous fluids in electric field and absorption of light] // *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 1989. vol. 59. no. 7. p. 10–17. [in Russian]
9. Altoiz B.A., Savin, N.V., Shatagina, E.A. Effect of heat release in a microinterlayer of a liquid on the measurement of its viscosity // *Tech. Phys.* 2014.V. 59. I. 5. p. 649–655.
10. Kushtanova G.G. Fizika geosfery [Physics of the geosphere]. Kazan. From Kazan State University. 2004. 44 p. [in Russian]
11. Semenov N.N. Tsepnyye reaktsii [Chain reactions]. Moscow: Gomkhimtekhizdat. 1934. [in Russian]
12. Shestakov V.M. Hydrogeodynamica [Hydrogeodynamics]. Moscow: Moscow State University. 1995. 368 p. [in Russian]
13. Ahmed H. F., Malik F. K., Khan M. M. Influence of passive wake control on thermal-hydraulic performance of a cylinder confined in wavy channel under high blockage ratios // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2022. V. 29. I. 3. p. 371–388.
14. Delnov V.N. Application of flow patterns and accounting of hydrodynamic effects in the course of upgrading distribution header systems of npp heat exchangers and reactors // *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear and Reactor Constants*. 2021. I. 2. 2:14. [in Russian].
15. Renev M. E., Safronova Yu. F., Stishkov Yu. K. Controlling the Flow around a Circular Cylinder by Means of a Corona Discharge // *Technical Physics*. 2019. V. 64. I. 9. p. 1275–1282.
16. Khoroshev A.S., Shakhov V.G. The Intensity of Convection of Fluids With Different Prandtl Number in a Vertical Cylinder of Large Aspect Ratio // *Mathematical Physics and Computer Simulation*. 2018. V. 21 No. 1. p. 70–79. [in Russian].
17. Antuono M., Sun P. N., Marrone S., Colagrossi A. The δ -ALE-SPH model: an arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the δ -SPH model with Particle Shifting Technique. *Computer & Fluids*. 2020;104806.
18. Mohammed A. and others. CFD and statistical approach to optimize the average air velocity and air volume fraction in an inert-particles spouted-bed reactor (IPSBR) system. *Helvion*. 2021;7(3):E06369.
19. Ren X., Xu K., Shyy W. A multi-dimensional high-order DG-ALE method based on gas-kinetic theory with application to oscillating bodies. *Journal of Computational Physics*. 2016;316:700–720.
20. Elgeti S., Sauerland H. Deforming fluid domains within the finite element method: five mesh based tracking methods in comparison. *Archives of Computational methods in Engineering*. 2016;23:323–361.
21. Burago N. G., Nikitin I. S., Yakushev V. L., “Application of overlapping meshes to flow computation in domains of variable geometry,” *Proceedings of the 20th International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Systems (2017)*, p. 395–397. 2017:395–397.
22. Knyazev D. V., Kolpakov I. Y. The exact solutions of the problem of a viscous fluid flow in a cylindrical domain with varying radius // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2015;11(1):89–97. [in Russian].
23. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // *Czechoslovak Journal of Physics*. 1994. V. 44. No. 2. p. 97–106.
24. Sheretov Yu. V., “On solutions of the Cauchy problem for a quasi-hydrodynamic system,” *Vestn. Tver. Gos. Univ. Ser. Prikl. Mat.* 2020. No. 1. p. 84–96. [in Russian].
25. Arnol'd V. "Sur la topologie des ecoulements stationnaires des fluides parfaits". *C. R. Acad. Sci. Paris*, 261:17–20, 1965.

26. Bogoyavlenskij O. I., "On the Kelvin's 1880 problem and exact solutions of the Navier–Stokes equations," Steklov Mathematical Institute Seminar "Mathematics and Its Applications," May 21, 2015, Moscow, Conference Hall(Gubkina 8). [in Russian].
27. Betelin V.B., Galkin V.A., Gorelikov A.V. Predictor–Corrector Algorithm for the Numerical Solution of the Magnetic Field Equation in Viscous Incompressible MHD Problems // Doklady Mathematics. 2015. V. 92. No. 2. p. 618–621.
28. Galkin V. A., Morgun D. A. Modeling and Visualization of Particle Trajectories Driven by an Asymmetric Potential // Russian Journal of Cybernetics. 2022. V.3. No 3. p. 8–13. [in Russian].